

Weiteres mächtiges Mittel  
zur Formalisierung:

## Prädikatenlogik

Voraussetzung:  
Aussagenlogik 54  
Broy, Bd. 1, S. 8... 23

Eingesetzt in der Informatik z.B. für

- Modellierung ungangssprachlicher Aussagen
- Beweise der Korrektheit von Programmen
- Programmiersprachen für Problembereiche,  
die sich zur Modellierung mit log.  
Formeln eignen (siehe Ü)

Motivation: Aussagenlogik zu beschränkt  
für die Formulierung nichttrivialer  
Aussagen über die reale Welt.

Wünschenswert sind Formulierungsmög-  
lichkeiten der Form:

- 'Es gibt ein Objekt  $x$  mit der  
Eigenschaft  $y$ '
- 'Für alle Objekte  $z$  gilt, daß.....'
- oder konkret z.B.  
'Alle Hunde haben Schwänze'

- Argumente sind Terme, einfachste Form eines Terms ist eine Variable, <sup>55</sup> komplexere Terme entstehen durch die (gedachte) Funktionsanwendung auf Variable, z.B.  $h(f(x, y), x, z)$ :  $h$  ist ein dreistelliges,  $f$  zweistelliges Funktionsymbol.

### Beispiele:

Literaturhinweis:  
 Elaine Rich  
 Artificial Intelligence  
 McGraw Hill, 1983

1. Mann (Markus) 'Markus war ein Mann'
  2. Pompejer (Markus) ' " von Pompeji "
  3.  $\forall x (\text{Pompejer}(x) \rightarrow \text{Römer}(x))$  'Alle Pompejer waren Römer'
  4. Herrscher (Cäsar) 'Cäsar war ein Herrscher'
  5.  $\forall x (\text{Römer}(x) \rightarrow \text{loyal}(x, \text{Cäsar}) \vee \text{kapt}(x, \text{Cäsar}))$
  6.  $\forall x \exists y \text{ loyal}(x, y)$  'Jeder ist jemandem gegenüber loyal'
- vs.  $\exists x \forall y \text{ loyal}(y, x)$  'Es gibt jemanden, gegenüber dem jeder loyal ist'

vs.  $\exists x \forall y \text{ loyal}(x, y)$

'Es gibt jemanden  
der gegenüber jedem  
loyal ist.'

56

7.  $\forall x \forall y$  (Person(x)  $\wedge$  Herrscher(y)  $\wedge$   
will-umbringen(x,y)  $\rightarrow$   
 $\neg$  loyal(x,y))

'Menschen, die Herrscher  
umbringen wollen, sind diesen  
gegenüber nicht loyal'

8. will-umbringen(Markus, Cäsar)

9.  $\forall x$  (Mann(x)  $\rightarrow$  Person(x))

Frage: Kann aus (8) geschlossen werden,  
dass Markus gegenüber Cäsar nicht  
loyal war?

Formal zu zeigen:  $\neg$  loyal(Markus, Cäsar)

Sofort beweisbar durch Anwendung von  
(9) mit der Substitution  $x/\text{Markus}$

Mann(Markus)  $\rightarrow$  Person(Markus) und

dann Anwendung auf (7) mit der

Substitution  $x/\text{Markus}, y/\text{Cäsar}$ , was auf

Person(Markus)  $\wedge$  Herrscher(Cäsar)  $\wedge$  will-umbringen  
(Markus, Cäsar)  $\rightarrow$   $\neg$  loyal(Markus,  
Cäsar)

führt.

1. man(Marcus)
2. Pompeian(Marcus)
3. born(Marcus, 40)
4.  $\forall x \text{ man}(x) \rightarrow \text{mortal}(x)$
5.  $\forall x \text{ Pompeian}(x) \rightarrow \text{died}(x, 79)$
6. erupted(volcano, 79)
7.  $\forall x \forall t_1 \forall t_2 \text{ mortal}(x) \wedge \text{born}(x, t_1) \wedge \text{gt}(t_2 - t_1, 150) \rightarrow \text{dead}(x, t_2)$
8. now = 1983
9.  $\forall x \forall t \text{ alive}(x, t) \leftrightarrow \sim \text{dead}(x, t)$
10.  $\forall x \forall t_1 \forall t_2 \text{ died}(x, t_1) \wedge \text{gt}(t_2, t_1) \rightarrow \text{dead}(x, t_2)$

Figure 5-4: A Set of Facts about Marcus

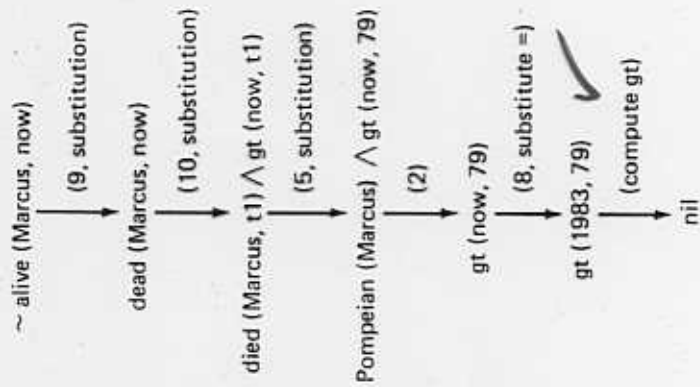


Figure 5-5: One Way of Proving That Marcus Is Dead

but in another sense they are not if they share the same bound variables, since,

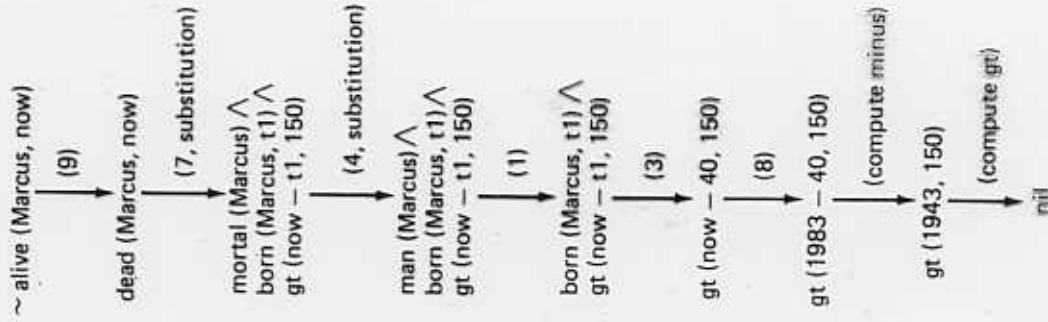


Figure 5-6: Another Way of Proving That Marcus substitutions throughout a proof. Mechanisms for doing both c be discussed below.

From looking at the proofs we have just shown, two

## Syntaktische Form der PL 1

59

- Prädikatenlogische Formeln (wff: well-formed formula) können die bekannte Form aussagenlog. Formeln haben, wie  $\neg a$ ,  $a \wedge b$ ,  $\dots$ , wobei  $a$  und  $b$  ebenfalls Formeln sein können
- Zusätzliche Bestandteile sind nun die Quantoren  $\forall$  und  $\exists$ : der Allquantor und der Existenzquantor.
  - Damit Formeln der Form  $\exists x A$  oder  $\forall x B$  konstruierbar, wobei  $x$  eine Variable und  $A, B$  wiederum Formeln (sog. Atomformeln) sind.
  - In Aussagenlogik sind die einfachsten Formeln die Aussagenvariable, denen ein bestimmter Wahrheitswert zugeordnet wird
  - Atomformeln der PL haben die Form  $P(\dots)$ , wobei  $P$  ein Symbol für ein Prädikat ist mit beliebig vielen Argumenten

# Elemente der PL

- Prädikatsymbole (Relationen)  
 $P, Q, R$  bestimmter Stelligkeit
- Funktionsymbole  $f, g, h$   
bestimmter Stelligkeit
- Variable  $x, y, z$
- Konstante  $a, b, c$

Damit werden Formeln der PL syntaktisch korrekt wie folgt gebildet:

1. Terme (a) Jede Variable ist ein Term  
(b) Sind  $t_1, \dots, t_{n_i}$  Terme, dann ist auch  $f_i(t_1, \dots, t_{n_i})$  ein Term

## 2. Atomare Formeln

Sind  $t_1, \dots, t_{p_j}$  Terme, dann ist  $P_j(t_1, \dots, t_{p_j})$  eine atomare Formel

## 3. Formeln

- (a) Jede atomare Formel ist eine Formel
- (b) Sind  $P$  und  $Q$  Formeln, dann sind auch  $(P \wedge Q)$ ;  $(P \vee Q)$ ;  $\neg P$ ;  $(P \rightarrow Q)$  und  $(P \leftrightarrow Q)$  Formeln

(c) Ist  $P$  Formel und  $x$  Variable,  
dann sind auch  $\forall x P$  sowie  $\exists x P$   
Formeln

(d) Nur Zeichenreihen, die in  
endlich vielen Schritten nach 3(a) ...  
3(c) gebildet werden können, sind  
Formeln

### Interpretation der Formeln der PL

Bei Aussagenlogik ist Interpretation einfach:  
Einsetzen von Wahrheitswerten in die  
Variablen der aussagenlogischen Formel  
und Bestimmung des Wahrheitswerts  
der Gesamtfornel

Demgegenüber bei PL erforderlich zur  
Festlegung der semantischen Interpretation:

- Festlegung der Signatur der Formel (Menge)  
d.h. Angabe des Typs der Symbole  
(Prädikate, Funktionen, Konstante) und  
ihre Stelligkeit
- Festlegung der Trägermenge
- Angabe der einzelnen konkreten  
Prädikate und Funktionen



## Beispiele

a) Formel

$$\forall x \forall y \exists z (\neg P(x, f(y, a)) \vee Q(f(z, g(a, a, x, y))))$$

Signatur: P zweistelliges Prädikat  
Q einstelliges Prädikat  
f zweistellige Fkt.  
g vierstellige Funktion  
a nullstellige Fkt. (Konstante)

(Bedeutung) Struktur: Trägermenge  $\mathbb{N}$

P sei klein-Relation '<'

Q sei 'odd'

$$f(x, y) = x^2 + y$$

$$g(x, y, v, w) = x \cdot y \cdot v \cdot w$$

a sei 5, b sei 1

Unter dieser Interpretation wird aus der obigen Formel:

$$\forall x \forall y \exists z (\neg (x < (y^2 + 5)) \vee \text{odd}(z^2 + a^2xy))$$