Voraussetzung:
Aussagenlogik
Broy, Bd. 1, S. 8 ... 23

Weiteres mächtiges Mittel zur Formalisierung:

Prädikatenlogik

Eingesetzt in der Informatik z.B. für

- Modellierung umgangssprachlicher Aussagen
- Beweise der Korrektheit von Programmen
- Programmiersprachen für Problembereiche, die sich zur Modellierung mit log. Formeln eignen (siehe Ü)

Motivation: Aussagenlogik zu beschränkt für die Formulierung nichttrivialer Aussagen über die reale Welt.

Wünschenswert sind Formulierungsmöglichkeiten der Form:

- 'Es gibt ein Objekt x mit der Eigenschaft y'
- 'Für alle Objekte z gilt, daß ....'
- oder konkret z.B. 'Alle Hunde haben Schwänze'

- Argumente sind Terme, einfachste Form eines Terms ist eine Variable; Komplexere Terme entstehen durch die (geschachtelte) Funktionsanwendung auf Variable, z.B. $h(f(x,y),x,z)$: h ist ein dreistelliges, f zweistelliges Funktionssymbol.

Literaturhinweis:
Elaine Rich
Artificial Intelligence
Mc Graw Hill, 1983

<u>Beispiele</u>:

1. Mann (Markus) — 'Markus war ein Mann'
2. Pompejer (Markus) — ' " von Pompeji'
3. $\forall x$ (Pompejer (x) $\rightarrow$ Römer (x)) — 'Alle Pompejer waren Römer'
4. Herrscher (Cäsar) — 'Cäsar war ein Herrscher'
5. $\forall x$ (Römer (x) $\rightarrow$ loyal (x, Cäsar) $\vee$ haßt (x, Cäsar))
6. $\forall x \exists y$ loyal (x, y) — 'Jeder ist jemandem gegenüber loyal'

   vs. $\exists x \forall y$ loyal (y, x) — 'Es gibt jemanden, gegenüber dem jeder loyal ist' vs. $\exists x \forall y$ loyal(x, y) 'Es gibt jemanden, der gegenüber jedem loyal ist!

7. $\forall x \forall y$ (Person(x) $\wedge$ Herrscher(y) $\wedge$ will_umbringen(x, y) $\rightarrow$ $\neg$ loyal(x, y))

'Menschen, die Herrscher umbringen wollen, sind diesen gegenüber nicht loyal'

8. will_umbringen(Markus, Cäsar)

9. $\forall x$ (Mann(x) $\rightarrow$ Person(x))

Frage: Kann aus (8) geschlossen werden, daß Markus gegenüber Cäsar nicht loyal war?

Formal zu zeigen: $\neg$ loyal(Markus, Cäsar)

Sofort beweisbar durch Anwendung von (9) mit der Substitution x/Markus

Mann(Markus) $\rightarrow$ Person(Markus) und

dann Anwendung auf (7) mit der Substitution x/Markus, y/Cäsar, was auf

Person(Markus) $\wedge$ Herrscher(Cäsar) $\wedge$ will_umbringen(Markus, Cäsar) $\rightarrow$ $\neg$ loyal(Markus, Cäsar)

führt.

Aus: E. Rich, Artificial Intelligence, 1983


```
1. man(Marcus)
2. Pompeian(Marcus)
3. born(Marcus,40)
4. ∀x man(x) → mortal(x)
5. ∀x Pompeian(x) → died(x,79)
6. erupted(volcano,79)
7. ∀x∀t1∀t2 mortal(x) ∧ born(x,t1) ∧ gt(t2−t1,150)
        → dead(x,t2)
8. now=1983
9. ∀x∀t alive(x,t) ↔ ~dead(x,t)
10. ∀x∀t1∀t2 died(x,t1) ∧ gt(t2,t1) → dead(x,t2)
```

Figure 5–4: A Set of Facts about Marcus

~ alive (Marcus, now)
↓ (9, substitution)
dead (Marcus, now)
↓ (10, substitution)
died (Marcus, t1) ∧ gt (now, t1)
↓ (5, substitution)
Pompeian (Marcus) ∧ gt (now, 79)
↓ (2)
gt (now, 79)
↓ (8, substitute =)
gt (1983, 79)
↓ (compute gt)
nil

Figure 5–5: One Way of Proving That Marcus Is Dead

but in another sense they are not if they share the same bound variables, since,

~ alive (Marcus, now)
↓ (9)
dead (Marcus, now)
↓ (7, substitution)
mortal (Marcus) ∧
born (Marcus, t1) ∧
gt (now − t1, 150)
↓ (4, substitution)
man (Marcus) ∧
born (Marcus, t1) ∧
gt (now − t1, 150)
↓ (1)
born (Marcus, t1) ∧
gt (now − t1, 150)
↓ (3)
gt (now − 40, 150)
↓ (8)
gt (1983 − 40, 150)
↓ (compute minus)
gt (1943, 150)
↓ (compute gt)
nil

Figure 5–6: Another Way of Proving That Marcus

substitutions throughout a proof. Mechanisms for doing both c
be discussed below.

From looking at the proofs we have just shown, two

Syntaktische Form der PL1

Prädikatenlogische Formeln (wff: well-formed formula) können die bekannte Form aussagenlog. Formeln haben, wie $\neg a$, $a \wedge b$, ..., wobei a und b ebenfalls Formeln sein können

- Zusätzliche Bestandteile sind nun die Quantoren $\forall$ und $\exists$: der Allquantor und der Existenzquantor.
- Damit Formeln der Form $\exists x\ A$ oder $\forall x\ B$ konstruierbar, wobei x eine Variable und A, B wieder um Formeln (sog. Atomformeln) sind.
- In Aussagenlogik sind die einfachsten Formeln die Aussagenvariable, denen ein bestimmter Wahrheitswert zugewiesen wird
- Atomformeln der PL haben die Form P(....), wobei P ein Symbol für ein Prädikat ist mit beliebig vielen Argumenten

Elemente der PL

- Prädikatssymbole (Relation) P, Q, R bestimmter Stelligkeit
- Funktionssymbole f, g, h bestimmter Stelligkeit
- Variable x, y, z
- Konstante a, b, c

Damit werden Formeln der PL syntaktisch korrekt wie folgt gebildet:

1. Terme (a) Jede Variable ist ein Term
   (b) Sind $t_1, \dots, t_{n_i}$ Terme, dann ist auch $f_i(t_1, \dots, t_{n_i})$ ein Term

2. Atomare Formeln

   Sind $t_1, \dots, t_{p_j}$ Terme, dann ist $P_j(t_1, \dots, t_{p_j})$ eine atomare Formel

3. Formeln

   (a) Jede atomare Formel ist eine Formel
   (b) Sind P und Q Formeln, dann sind auch $(P \wedge Q)$; $(P \vee Q)$; $\neg P$, $(P \rightarrow Q)$ und $(P \leftrightarrow Q)$ Formeln

(c) Ist P Formel und x Variable, dann sind auch $\forall x\, P$ sowie $\exists x\, P$ Formeln

(d) Nur Zeichenreihen, die in endlich vielen Schritten nach 3(a)... 3(c) gebildet werden können, sind Formeln

Interpretation der Formeln der PL

Bei Aussagenlogik ist Interpretation einfach: Einsetzen von Wahrheitswerten in die Variablen der aussagenlogischen Formel und Bestimmung des Wahrheitswerts der Gesamtformel

Demgegenüber bei PL erforderlich zur Festlegung der semantischen Interpretation:

- Festlegung der Signatur der Formel (menge) d.h. Angabe des Typs des Symbols (Prädikat, Funktion, Konstante) und seine Stelligkeit
- Festlegung der Trägermenge
- Angabe der einzelnen konkreten Prädikate und Funktionen

Beispiele

a) Formel

$$\forall x \forall y \exists z \left(\neg P(x, f(y,a)) \vee Q(f(z, g(a,a,x,y))) \right)$$

Signatur: P zweistelliges Prädikat
Q einstelliges Prädikat
f zweistellige Fkt.
g vierstellige Funktion
a nullstellige Fkt. (Konstante)

(Rechen) Struktur: Trägermenge $\mathbb{N}$
P sei kleiner-Relation '<'
Q sei 'odd'
$f(x,y) = x^2 + y$
$g(x,y,v,w) = x \cdot y \cdot v \cdot w$
a sei 5, b sei 1

Unter dieser Interpretation wird aus der obigen Formel:

$$\forall x \forall y \exists z \left(\neg (x < (y^2+5)) \vee odd(z^2 + a^2xy) \right)$$